第28卷 第2期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 2
2011年04月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Apr. 2011

文章编号:1005-3085(2011)02-0231-07

椭圆型方程的一种新型混合有限元格式*

史 峰, 于佳平, 李开泰

(西安交通大学理学院，西安 710049)

摘 要: 基于实际问题对通量较低的正则性要求，本文建立了椭圆型方程的一种新型混合变分形式．在鞍点问题框架下，通过验证LBB条件，证明了该混合形式解的存在唯一性．由于压力空间不再是传统的$\mathbf{H}\,(\mathrm{div})$，而是平方可积空间，因此混合元的选取变得简单容易．同时本文给出了相应的有限元逼近形式，并对于由分片常数速度元和分片线性压力元构成的协调有限元对$P_0^2-P_1$，通过验证速度投影算子的有界性，证明了有限元解的存在唯一性，以及有限元逼近在某种意义下是最优的．最后给出了数值算例，验证了方法的有效性和理论分析的正确性．此方法还可以通过增加简单的稳定项使用最为常用的最低阶等阶有限元．

关键词: 椭圆型方程；混合变分形式；协调有限元对；LBB条件

分类号: **AMS**(2000) 65N12; 65N30　　**中图分类号**: O175.25; O241.82; O242.21　　**文献标识码**: A

1 引言

Ω是$\mathbf{R}^d\,(d=2,3)$空间中具有Lipschitz边界$(\Gamma=\partial\Omega)$的有界区域．我们考虑如下的椭圆型方程

$$-\Delta p=f,\quad 在\ \Omega\ 内, \tag{1}$$

$$p=0,\quad 在\ \Gamma\ 上. \tag{2}$$

该方程刻画了很多的物理和力学现象，例如：具有固定边界的弹性膜在强加强度为f的外力时的平衡状态，当$f=0$时，一些物理量(化学浓度、温度分布等)的平衡问题等[1]．对该方程的有限元逼近方法和为了降低解的正则性要求而引入的混合变分形式及其有限元逼近已经有许多研究[1-4]．

假定$f\in L^2(\Omega)$，引入通量$\mathbf{u}=-\nabla p$，方程(1)-(2)传统的混合变分形式为：求$\mathbf{u}\in\mathbf{V}$，$p\in W$，使得

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})-(\nabla\cdot\mathbf{v},p)=0,\quad\forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{V}, \tag{3}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{u},w)=(f,w),\quad\forall\,w\in W, \tag{4}$$

其中

$$\mathbf{V}=\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega),\quad W=L^2(\Omega). \tag{5}$$

收稿日期: 2009-05-25. **作者简介**: 史峰(1981年3月生)，男，博士．研究方向：偏微分方程数值方法．
***基金项目**: 国家自然科学基金(10971165; 10771167; 10926080).

令 K_h 是 Ω 的一个剖分，选取适当的 $\mathbf{V}_h \subseteq \mathbf{V}$ 和 $W_h \subseteq W$，则 (3)-(4) 相应的有限元逼近为：求 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$，$p_h \in W_h$，使得

$$(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p_h) = 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \tag{6}$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, w) = (f, w), \quad \forall\, w \in W_h. \tag{7}$$

众所周知，如果有限元对 $(\mathbf{V}_h, W_h)$ 满足离散 LBB 条件

$$\inf_{w_h \in W_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, w_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}\|w_h\|_W} \geq \beta > 0, \tag{8}$$

其中 β 不依赖 h，则 (6), (7) 存在唯一解，且逼近是最优的. 满足要求的有限元对有很多，比如 RT 元、BDM 元等等[2,3].

我们注意到通量 $\mathbf{u} = -\nabla p$ 并不需要 (3)-(4) 中如此高的正则性，事实上仅需要具有 L^2-正则性. 基于此，我们在下一节中我们给出 (1)-(2) 的一个新的混合变分形式，并证明其解的存在唯一性. 在第 3 节中我们给出相应的混合有限元逼近，并对由分片常数速度元和分片线性压力元构成的协调有限元对证明解的存在唯一性. 另外，我们还证明有限元解的逼近在某种意义下是最优的. 最后，在第 4 节中给出一个数值算例，验证第 3 节中给出的有限元逼近的有效性以及理论分析的正确性.

2 一个新的混合变分形式

由分部积分公式和 $p|_\Gamma = 0$，可知 $(\nabla \cdot \mathbf{v}, p) = -(\mathbf{v}, \nabla p)$. 因此 (3)-(4) 可以改写为

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla p) = 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \tag{9}$$

$$-(\mathbf{u}, \nabla w) = (f, w), \quad \forall\, w \in W_1, \tag{10}$$

其中

$$\mathbf{V}_1 = (L^2(\Omega))^d, \quad W_1 = H_0^1(\Omega), \tag{11}$$

并赋予通常的范数.

定义

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \tag{12}$$

$$b(\mathbf{v}, p) = -(\mathbf{v}, \nabla p), \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \quad p \in W_1, \tag{13}$$

根据 (9)-(10)，方程 (1)-(2) 的一个新的变分形式为：求 $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_1$，$p \in W_1$，使得

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) = 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \tag{14}$$

$$b(\mathbf{u}, w) = (f, w), \quad \forall\, w \in W_1. \tag{15}$$

显然，这是一个鞍点问题. 针对此问题，我们在下面的两个引理中给出一些相关性质.

引理 1 双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 和 $b(\cdot,\cdot)$ 是连续的，且 $a(\cdot,\cdot)$ 是椭圆的，即

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_1}, \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \tag{16}$$

$$b(\mathbf{v}, p) \leq \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_1}\|p\|_{W_1}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_1, \quad p \in W_1, \tag{17}$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}_1}^2, \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{V}_1. \tag{18}$$

证明是直接的，我们这里略去.

引理2　双线性形式 $b(\cdot,\cdot)$ 满足LBB条件，即存在常数 $\beta_1>0$，使得

$$\inf_{w\in W_1}\sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}_1}\frac{-(\mathbf{v},\nabla w)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_1}\|w\|_{W_1}}\geq\beta_1. \tag{19}$$

证明　对任意的 $w\in W_1$，取 $\mathbf{v}=-\nabla w$，我们有 $\mathbf{v}\in\mathbf{V}_1$，以及

$$\frac{-(\mathbf{v},\nabla w)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_1}\|w\|_{W_1}}=\frac{\|\nabla\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}_1}}{\|w\|_{W_1}}.$$

根据全范 $\|w\|_{H^1}$ 和半范 $\|\nabla w\|_{(L^2(\Omega))^d}$ 的等价性，即

$$c_1\|\nabla w\|_{(L^2(\Omega))^d}\leq\|w\|_{H^1}\leq c_2\|\nabla w\|_{(L^2(\Omega))^d},\quad w\in W_1,$$

我们得到

$$\frac{-(\mathbf{v},\nabla w)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_1}\|w\|_{W_1}}\geq\frac{1}{c_2}.$$

取 $\beta_1=\frac{1}{c_2}$ 即得结论.

结合引理1和引理2，我们从经典的鞍点问题抽象理论[2,3]可知如下定理成立.

定理1　变分问题(14)-(15)存在唯一解 $(\mathbf{u},p)\in\mathbf{V}_1\times W_1$.

注1　(i)　若 $f\in H^{-1}(\Omega)$，我们知道(1)-(2)的唯一弱解满足

$$p\in H_0^1(\Omega),\quad \mathbf{u}:=-\nabla p\in\left(L^2(\Omega)\right)^d.$$

这些正则性和定理1的正则性是一致的，这使得我们的变分形式比(3)-(4)更加自然.

(ii)　进一步，如果 $f\in L^2(\Omega)$，相似的讨论可知

$$(\mathbf{u},p)\in(H^1(\Omega))^d\times\left(H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)\right).$$

3　有限元逼近

在选取了两个协调有限元空间 $\mathbf{V}_{1h}\subseteq\mathbf{V}_1$ 和 $W_{1h}\subseteq W_1$ 之后，我们给出(14)-(15)式的有限元逼近形式为：求 $\mathbf{u_h}\in\mathbf{V}_{1h}$，$p_h\in W_{1h}$，满足

$$a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)-b(\mathbf{v}_h,p_h)=0,\quad\forall\,\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_{1h}, \tag{20}$$

$$b(\mathbf{u}_h,w_h)=(f,w_h),\quad\forall\,w_h\in W_{1h}. \tag{21}$$

为了确保该逼近问题解的存在唯一性，我们要求选取的有限元空间对满足形如(8)的离散LBB条件，即存在不依赖于 h 的常数 β_2，使得

$$\inf_{w_h\in W_{1h}}\sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_{1h}}\frac{-(\mathbf{v}_h,\nabla w_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}_1}\|w_h\|_{W_1}}\geq\beta_2>0. \tag{22}$$

本节我们仅考虑二维情形，令 K_h 为 Ω 的三角剖分，并在Ciarlet意义下是正则的[1]. 取 $(\mathbf{V}_{1h},W_{1h})$ 为有限元对 $P_0^2-P_1$，具体定义如下

$$\mathbf{V}_{1h}=\left\{\mathbf{v}_h=(v_{1h},v_{2h})\in\mathbf{V}_1:v_{ih}\in P_0(K),\,\forall\,K\in K_h,i=1,2\right\}, \tag{23}$$

$$W_{1h}=\left\{w\in C^0(\Omega)\bigcap W_1:w\in P_1(K),\,\forall\,K\in K_h\right\}. \tag{24}$$

引理3 有限元对 $P_0^2-P_1$ 满足离散LBB条件(22).

证明 我们借鉴Fortin的思想[2,5]来验证条件(22)，仅需要构造有界算子 $\Pi_h:\mathbf{V}_1\to\mathbf{V}_{1h}$，使得对任意的 $\mathbf{v}\in\mathbf{V}_1$，有

$$b(\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v},w_h)=-(\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v},\nabla w_h)=0,\quad\forall\,w_h\in W_{1h}.\tag{25}$$

令 $w_h=\alpha_K x+\beta_K y$，对任意的 $K\in K_h$，其中 $\alpha_K,\beta_K\in R$ 为单元 K 上的任意常数. (25)式等价于

$$\big(\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v},(\alpha_K,\beta_K)^T\big)_K=0,$$

即

$$\alpha_K\int_K\big((\mathbf{v})^1-(\Pi_h\mathbf{v})^1\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta_K\int_K\big((\mathbf{v})^2-(\Pi_h\mathbf{v})^2\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由 $\alpha_K,\beta_K\in R$ 的任意性可得

$$\Pi_h\mathbf{v}\,|_K=\frac{1}{|K|}\int_K\mathbf{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad\forall\,K\in K_h,\tag{26}$$

从而由Hölder不等式得到

$$\begin{aligned}\|\Pi_h\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_1}&=\Big\{\sum_{K\in K_h}\big\|\Pi_h\mathbf{v}\,|_K\big\|^2_{(L^2(K))^d}\Big\}^{1/2}\\&=\Big\{\sum_{K\in K_h}\frac{1}{|K|}\Big(\Big(\int_K v_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^2+\Big(\int_K v_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^2\Big)\Big\}^{1/2}\\&\le\Big\{\sum_{K\in K_h}\int_K|v_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_K|v_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big\}^{1/2}=\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_1}.\end{aligned}$$

这说明算子 Π_h 是有界的.

另外，由插值理论[4]，我们可知，Π_h 满足插值误差

$$\|\mathbf{v}-\Pi_h\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_1}\le ch\|\mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^d},\quad\forall\,\mathbf{v}\in(H^1(\Omega))^d,\tag{27}$$

其中 c 不依赖于 h 和 $\mathbf{v}$.

定理2 对于有限元对 $P_0^2-P_1$，混合有限元变分形式(20)-(21)存在唯一解 $(\mathbf{u_h},p_h)\in\mathbf{V}_{1h}\times W_{1h}$，并满足

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}_1}+\|p-p_h\|_{W_1}\le c\Big(\inf_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_1}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}_1}+\inf_{w_h\in W_1}\|p-w_h\|_{W_1}\Big),\tag{28}$$

其中 $(\mathbf{u},p)\in\mathbf{V}_1\times W_1$ 为(14)-(15)的唯一解. 另外有

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}_1}+\|p-p_h\|_{W_1}\le ch\big(\|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^d}+\|p\|_{H^2(\Omega)}\big),\tag{29}$$

进一步地

$$\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)}\le ch^2\big(\|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^d}+\|p\|_{H^2(\Omega)}\big).\tag{30}$$

证明 从鞍点问题的一般理论[2,3]，可得到(28),(29)，我们只需征明(30). 为此定义双线性形式

$$\mathcal{B}(\mathbf{u},p;\mathbf{v},w)=a(\mathbf{u},\mathbf{v})-b(\mathbf{v},p)+b(\mathbf{u},w).$$

那么，(14)-(15), (20)-(21) 可以分别改写为

$$\mathcal{B}(\mathbf{u},p;\mathbf{v},w)=(f,w),\quad \mathcal{B}(\mathbf{u}_h,p_h;\mathbf{v}_h,w_h)=(f,w_h).$$

从而有正交性公式

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,p-p_h;\mathbf{v_h},w_h)=0,\quad \forall\,(\mathbf{v}_h,w_h)\in\mathbf{V}_{1h}\times W_{1h}. \tag{31}$$

为了证明 (30) 式，我们借鉴 Layton-Toshiba 方法[6,7]，定义对偶问题：求 $(\phi,\lambda)\in\mathbf{V}_1\times W_1$，满足

$$\mathcal{B}(\mathbf{v},w;\phi,\lambda)=(w,e),\quad \forall\,(\mathbf{v},w)\in\mathbf{V}_1\times W_1, \tag{32}$$

这里 $e=P_hp-p_h$，P_h 为通常的投影算子，满足

$$\|w-P_hw\|_{L^2}+h\|w-P_hw\|_{H^1}\le ch^2\|w\|_{H^2},\quad \forall\,w\in H^2\bigcap W_1. \tag{33}$$

显然，由第 2 节的讨论可知，(32) 存在唯一解，并且满足正则性

$$\|\phi\|_{\mathbf{H}^1}+\|\lambda\|_{H^2}\le c\|e\|_{L^2}. \tag{34}$$

令 $\eta=\Pi_h\mathbf{u}-\mathbf{u}_h$，并在 (32) 中取 $(\mathbf{v},w)=(\eta,e)$，我们有

$$\|e\|_{L^2}^2=\mathcal{B}(\eta,e;\phi,\lambda),$$

另一方面，在 (31) 中取 $(\mathbf{v}_h,w_h)=(\Pi_h\phi,P_h\lambda)$，可得

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}-\Pi_h\mathbf{u}+\eta,\,p-P_hp+e;\,\Pi_h\phi-\phi+\phi,\,P_h\lambda-\lambda+\lambda)=0.$$

结合 (29) 和 (32)-(34) 式，并在 (32) 式中取 $(\mathbf{v},w)=(\mathbf{u}-\Pi_h\mathbf{u},p-P_hp)$，我们得到

$$\begin{aligned}\|e\|_{L^2}^2 &= \mathcal{B}(\mathbf{u}-\Pi_h\mathbf{u},\,p-P_hp;\,\Pi_h\phi-\phi,P_h\lambda-\lambda)\\ &\quad+\mathcal{B}(\mathbf{u}-\Pi_h\mathbf{u},\,p-P_hp;\,\phi,\,\lambda)+\mathcal{B}(\eta,\,e;\,\Pi_h\phi-\phi,\,P_h\lambda-\lambda)\\ &\le ch^2\big(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}+\|p\|_{H^2}\big)\big(\|\phi\|_{\mathbf{H}^1}+\|\lambda\|_{H^2}\big)\\ &\quad+(p-P_hp,\,e)+ch^2\big(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}+\|p\|_{H^2}\big)\big(\|\phi\|_{\mathbf{H}^1}+\|\lambda\|_{H^2}\big)\\ &\le ch^2\big(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}+\|p\|_{H^2}\big)\|e\|_{L^2},\end{aligned}$$

从而有

$$\|e\|_{L^2}\le ch^2(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1}+\|p\|_{H^2}).$$

进一步由三角不等式，即证 (30).

注 2　从证明过程可以看出，该方法可以直接推广到三维情形，而且对于二维的四边形剖分和三维的六面体剖分也有类似的结论. 此外，该方法可以自然推广到一般的椭圆型偏微分方程，并可以考虑高阶的稳定化有限元格式.

4 算例

在本节中，我们给出一个简单的算例来验证上一节中给出的混合有限元格式的有效性以及理论分析的正确性．在原始方程(1)-(2)中，选取区域为单位正方形$[0,1]^2$，压力真解取$p=\sin(\pi x)\sin(\pi y)$，外力取$f=-2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y)$．显然，压力满足零值边界条件．

为了使用有限元方法求解，对区域进行一致网格剖分：分别沿x和y方向M等分，然后对每个四边形沿同一方向对角线连接，便得到需要的三角剖分．对于不同的网格，采用有限元空间(23)-(24)求解混合有限元格式(20)-(21)．表1给出了混合有限元逼近解在不同范数下的误差和收敛阶数．

表1：不同尺度网格下的速度和压力逼近误差及收敛阶

M	$\frac{\|p-p_h\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}$	收敛阶	$\frac{\|p-p_h\|_{H^1}}{\|p\|_{H^1}}$	收敛阶	$\frac{\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}}$	收敛阶
10	2.787 E-2	/	1.586 E-1	/	1.624 E-1	/
20	7.031 E-3	1.987	7.958 E-2	0.995	8.153 E-2	0.994
40	1.762 E-3	1.997	3.983 E-2	0.999	4.081 E-2	0.998
80	4.407 E-4	1.999	1.991 E-2	1.000	2.041 E-2	1.000
160	1.101 E-4	2.001	9.960 E-3	0.999	1.020 E-2	1.001

从表1可以看出，混合有限元逼近格式对于分片常数速度元和分片线性压力元构成的协调有限元对是稳定的，而且压力的L^2和H^1范数分别达到了理论上的2阶和1阶收敛精度，同时速度也达到了理论上的$\mathbf{L}^2$范数意义下的1阶收敛精度．

参考文献：

[1] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. Amsterdam: North-Holland, 1978

[2] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods[M]. New York: Springer, 1991

[3] Chen Z X. Finite Element Methods and Their Applications[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2005

[4] Quarteroni A, Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008

[5] Fortin M. An analysis of the convergence of mixed finite element methods[J]. RAIRO Analyse Numérique, 1977, 11(4): 341-354

[6] Layton W, Tobiska L. A two-level method with backtraking for the Navier-Stokes equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35(5): 2035-2054

[7] Li J, He Y N. A stabilized finite element method based on two local Gauss integrations for the Stokes equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2008, 214(1): 58-65

A New Mixed Finite Element Scheme for Elliptic Equations

SHI Feng, YU Jia-ping, LI Kai-tai

(School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: In this paper, a new mixed variational formulation to the elliptic equation is given based on the less regularity of flux in practical problems, and the existence and uniqueness of solution to this formulation is shown under the framework of the saddle point problem by verifying the LBB condition. Since in the new mixed variational formulation, the pressure belongs to the square integrable space instead of the classical $\mathbf{H}(\mathrm{div})$, the choices of finite element pairs become simple and easy. Based on this new formulation, the corresponding conforming finite element approximation is addressed, and the existence and uniqueness of finite element solutions are obtained for $P_0^2 - P_1$ pair consisting of piecewise constant element for velocity and piecewise linear element for pressure, by proving the boundedness of projection operator for velocity. Moreover, it's proven that the finite element approximation is optimal in some sense. Finally, some numerical experiments verify the effectiveness and theoretical results of our method. This method can be extended to utilize the lowest equal order finite element pair by adding some simple stabilization terms.

Keywords: elliptic equation; mixed variational formulation; conforming finite element pair; LBB condition

Received: 25 May 2009. **Accepted:** 09 Apr 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10971165; 10771167; 10926080).